© *С.К.Соболев.*

Краткие лекции по линейной алгебре

Лекция 7. Квадратичные формы

Квадратичные формы. Координатная и матричная формы записи. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без док-ва). Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Закон инерции квадратичных форм (без док-ва)

Обращение к лектору

Термин квадратичная форма в математике используется в двух смыслах.

1) **Квадратичная форма** – это просто функция от *n* переменных, являющаяся однородным многочленом второй степени от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j .$$

Коэффициенты a_{ij} образуют матрицу этой квадратичной формы.

Такого понятия квадратичной формы достаточно, например, чтобы объяснить, как выглядит **дифференциал второго порядка** функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ – это квадратичная форма (т.е. однородный многочлен второй степени) от дифференциалов независимых переменных, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ с матрицей Хессе

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

2) Но такого понятия квадратичной формулы совершенно не достаточно, чтобы объяснить, почему это квадратичная форма в понимании (1) должна менять матрицу при переходе к другому базису, ведь при определении (1) ни о каком базисе нет речи. Поэтому требуется более глубокое определение квадратичной формы как особого рода функции от вектора в линейном пространстве, т.е. **функционала**.

7.1. Линейный и билинейный функционалы.

Напомним, что ***линейным функционалом*** называется отображение вида $\varphi : L \to \mathbf{R}$, т.е. определенная на некотором линейном пространстве *L* и принимающее произвольные вещественные значения, и удовлетворяющая свойству

$$\varphi(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \varphi(\boldsymbol{x}) + \beta \varphi(\boldsymbol{y})$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Пример линейного функционала в пространстве $\boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$. Если $x(t) \in \boldsymbol{C}_{[a;\,b]}$ пусть $\varphi[x(t)] = \int_a^b x(t)\,dt$

Пусть *L* – *n*-мерное линейное пространство с базисом $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2; \ldots; \boldsymbol{e}_n\}$, и в нем задан линейный функционал $\varphi : L \to \mathbf{R}$. ***Строкой*** этого функционала в данном базисе называется матрица-строка

$$A_{\varphi,\,\varepsilon} = (a_1\ a_2 \ldots a_n) = \big(\varphi(\boldsymbol{e}_1)\ \ \varphi(\boldsymbol{e}_2)\ \ \ldots\ \ \varphi(\boldsymbol{e}_n)\big).$$

Пусть, далее $X = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^{\mathsf{T}}$ – столбец координат вектора $\boldsymbol{x} \in L$ в данном базисе, Тогда, значение линейного функционала φ на векторе $\boldsymbol{x}$ равно:

$$\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{k=1}^{n} x_i \varphi(\boldsymbol{e}_i) = (a_1\ a_2 \ldots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot X .$$

Понятно ,что строка функционала меняется при переходе к другому базису
Теорема 1. *Пусть A и A' – строки одного и того же функционала в старом базисе ε и в новом базисе δ соответственно, $P = P_{\varepsilon\to\delta}$ – матрица перехода. Тогда $A' = AP$.*

Определение. ***Билинейным функционалом*** на пространстве L называется отображение $B: L^2 \to \mathbf{R}$, которое каждой паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ ставит в соответствие число $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}$, и это отображение линейно по каждому аргументу:

$$B(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$B(\boldsymbol{x}, \alpha y + \beta \boldsymbol{z}) = \alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

Пример 1. (а) В пространстве геометрических векторов V формула $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{axy})$ (смешанное произведение), где $\boldsymbol{a} \in V$ – фиксированный вектор, задает билинейный функционал.
(б) В пространстве $\boldsymbol{C}_{[a;\, b]}$ формула

$$B(x(t), y(t)) = \int_a^b f(t)x(t)y(t)dt,$$

где $f(t)$ – фиксированная функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, $x(t), y(t) \in \boldsymbol{C}_{[a;\, b]}$, задает билинейный функционал.
(в) Пусть в произвольном евклидовом пространстве E действует линейный оператор $\mathcal{A}: E \to E$. Тогда формула $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\right)$ (скалярное произведение) задает билинейный функционал.

Пусть билинейный функционал $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ задан на конечномерном пространстве с базисом $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$. Вычислим значения билинейного функционала на каждой паре базисных векторов $a_{ij} = B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Квадратная матрица

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей билинейного функционала*** в данном базисе. С помощью этой матрицы можно вычислять значение билинейного функционала для любой пары векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$.

Теорема 2. *Пусть $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $(y_1; y_2; \dots; y_n)$ координаты (в некотором базисе) векторов **x** и **y** соответственно, $A = \left(a_{ij}\right)$ – матрица билинейного функционала $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в том же базисе. Тогда*

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{21}x_2y_1 + \ldots + a_{nn}x_ny_n. \quad (*)$$

*Если же $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)^{\mathsf{T}}$ и $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)^{\mathsf{T}}$ – столбцы координат векторов **x** и **y** соответственно, то формулу (*) можно записать в матричном виде:*

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = X^T A Y.$$

Пример 2. Найти матрицу билинейного функционала $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{axy})$ из примера 1 в базисе $\{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k}\}$, если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет в этом базисе координаты $\boldsymbol{a}(p; q; r)$

Решение. Вычисляем $a_{11} = \varphi(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{i}) = \left(\boldsymbol{aii}\right) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Аналогично, $a_{22} = a_{33} = 0$.

Далее, $a_{12} = \varphi(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \left(\boldsymbol{aij}\right) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = r$

Аналогично находим $a_{21}=-r, a_{13}=-q, a_{31}=q, a_{23}=p, a_{32}=-p$

Окончательно, матрица данного билинейного функционала.: $A=\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$. ■

При переходе к другому базису матрица билинейного функционала также меняется.

Теорема 3. *Пусть A и A' – матрицы одного и того же функционала в старом базисе ε и в новом базисе δ соответственно, $P=P_{\varepsilon\to\delta}$ – матрица перехода. Тогда $A'=P^{\mathsf{T}}AP$.*

7. 2. Квадратичный функционал

Определение. Пусть $B(x,y)$ некоторый билинейный функционал на линейном пространстве L. Функция $\varphi(\boldsymbol{x})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, получаемая отождествлением его аргументов, называется **квадратичным функционалом**. Таким образом, функционал $\varphi: L\to\mathbf{R}$ называется ***квадратичным***, если найдется билинейный функционал $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ такой, что $\varphi(\boldsymbol{x})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}\in L$. Отметим, что квадратичный функционал **не является линейным.**

Пример 3. Найти квадратичные функционалы, порожденные билинейными функционалами примеров 1 (б) и (в):

(б) $\varphi(x(t))=\int\limits_a^b f(t)\cdot x^2(t)\,dt$

(в) $\psi(\boldsymbol{x})=\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\right)$ (скалярное произведение).

Свойства квадратичного функционала описывает следующая

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\boldsymbol{x})$ – квадратичный функционал, заданный на линейном пространстве L. Тогда для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$ и произвольных чисел $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ выполняются равенства:*

(а) $\varphi(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha^2\varphi(\boldsymbol{x})$;

(б) $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=2\left(\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})\right)$;

(в) $\varphi(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})+\varphi(\beta\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})=(\alpha^2+\beta^2)\left(\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})\right)$.

Доказательство. Очевидно, что свойства (а) и (б) являются частными случаями свойства (в), поэтому его и докажем. Пусть $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – билинейный функционал, порождающий наш квадратичный функционал: $\varphi(\boldsymbol{x})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$. Тогда

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=B\left(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\right)=\alpha\cdot B\left(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\right)+\beta\cdot B\left(\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\right)=$$
$$=\alpha\cdot\left(\alpha\cdot B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)+\beta\cdot B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right)+\beta\cdot\left(\alpha\cdot B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+\beta\cdot B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\right)=$$
$$=\alpha^2B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)+\alpha\beta\left(B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+B\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\right)\right)+\beta^2B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}).$$

Аналогично,

$$\varphi(\beta\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})=\beta^2B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)-\alpha\beta\left(B\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+B\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\right)\right)+\alpha^2B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}).$$

Поэтому

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})+\varphi(\beta\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})=(\alpha^2+\beta^2)\left(B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\right)=(\alpha^2+\beta^2)\left(\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})\right).\ ■$$

Билинейный функционал $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ называется ***симметричным***, если $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$. Очевидно, что матрица симметричного функционала в любом базисе тоже симметрична, т.е. не меняется при транспонировании.

Лемма. *Для любого билинейного функционала $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и числа $\lambda\in\mathbf{R}$ билинейный функционал $B_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda\left(B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right)$ – симметричный.*

Замечание. Пусть $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *билинейный функционал.* $B_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\left(B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right)$. Тогда $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *и* $B_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *порождают один и тот же квадратичный функционал.* $\varphi(\boldsymbol{x})=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=B_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$.
Поэтому в дальнейшем будем полагать, что *любой квадратичный функционал порождается именно симметричным билинейным функционалом.*

7.3. Квадратичные формы. Координатная и матричная формы записи. Общий подход.

В конечномерном пространстве с базисом $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ если вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, то квадратичный функционал $\varphi(\boldsymbol{x})$ порожденный симметричным билинейным функционалом $B_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, задается однородным многочленом второй степени от координат вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

где $a_{ij} = B_0(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = B_0(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = a_{ji}$.

Этот многочлен называется ***квадратично формой*** (в базисе ε).

Симметричная матрица $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

называется ***матрицей квадратичного функционала*** $\varphi(\boldsymbol{x})$, или, что тоже самое, ***матрицей квадратичной формы*** в базисе $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

7.4. Квадратичные формы, упрощенный подход. Координатная и матричная формы записи.

Квадратичную форму можно определить и упрощенным образом, т.е. не вводя понятие билинейного и квадратичного функционала. А именно,

Определение. ***Квадратичной формой*** в данном базисе называется числовая функция вектора $\boldsymbol{x}$ конечномерного пространства, (т.е. функционал), выражающаяся однородным многочлена второй степени от координат вектора в данном базисе.

Например,

При $n = 2$: $f(\boldsymbol{x}) = f(x, y) = 2x^2 + 5xy - y^2$

При $n = 3$: $g(\boldsymbol{x}) = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 7x_2x_3$

В общем случае квадратичная форма от *n* переменных имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Коэффициент при произведении переменных $x_i x_j$ равен $a_{ij} + a_{ji}$, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$. Следовательно, матрицу коэффициентов

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно считать симметричной, и

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j$$

Квадратичную форму можно записать в матричном виде.

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1\ x_2 \ldots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^{\mathsf{T}} A X$$

где $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^{\mathsf{T}}$.

Диагональный элемент a_{ii} матрицы квадратичной формы равен коэффициенту при x_i^2, а при $i \neq j$ элемент $a_{ij} = a_{ji}$ равен половине коэффициента при произведении $x_i x_j$.

Пример 4. Найти матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3$

Ответ $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Пример 5. Восстановить квадратичную форму $g(\boldsymbol{x})$ по её матрице

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Ответ $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_3^2 - 5x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 8x_2x_4$

7.5. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

При изменении базиса матрица квадратичной формы тоже меняется.

Теорема 5. *Пусть A – матрица квадратичной формы в исходном базисе ε, A' – матрица этой же квадратичной формы в новом базисе ε', $P = P_{\varepsilon \to \varepsilon'}$ – матрица перехода. Тогда $A' = P^T AP$.*

Доказательство.

Лемма. Пусть квадратные симметричные матрицы A и B порядка n таковы, что для любого столбца X размером $n \times 1$ выполняется равенство $X^{\mathsf{T}} AX = X^{\mathsf{T}} BX$. Тогда $A = B$.

Доказательство Леммы. Рассмотрим матрицу $C = A - B = (c_{ij})$. Тогда $X^T CX = 0$ для любого столбца X. Сначала в качестве X возьмем столбец E_i, у которого на i-м месте стоит 1, а остальные нули. Тогда $E_i^{\mathsf{T}} CE_i = c_{ii} = 0$. Затем в качестве X возьмем столбец E_{ij}, у которого на местах с номерами i и j стоят единицы, а остальные нули. Тогда $E_{ij}^{\mathsf{T}} CE_{ij} = c_{ii} + 2c_{ij} + c_{jj} = 0 \Rightarrow c_{ij} = 0$. Следовательно, $A - B = C = 0 \Rightarrow A = B$.

Доказательство самой теоремы.

Пусть столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе равен X, а в новом Y. Тогда

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = X^{\mathsf{T}} AX = Y^{\mathsf{T}} A'Y.$$

С другой стороны,

$$X = PY \Rightarrow X^{\mathsf{T}} = Y^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}},$$

Поэтому

$$Y^{\mathsf{T}} A'Y = \varphi(\boldsymbol{x}) = X^{\mathsf{T}} AX = (Y^{\mathsf{T}} P^{\mathsf{T}})A(PY) = Y^{\mathsf{T}}(P^{\mathsf{T}} AP)Y,$$

и это равенство верно для любого столбца Y. Отсюда, по Лемме, $A' = P^T AP$. ■

Пример 6. Дана квадратичная форма $f(\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 2xy - 2y^2$ в базисе $\{\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j}\}$. Найти вид этой квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

Матрица данной квадратичной формы в исходном базисе $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Матрица перехода $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда в новом базисе матрица квадратичной формы будет

$$A' = P^{\mathsf{T}} AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$$

Сама квадратичная форма в новом базисе выглядит так:

$$f(\boldsymbol{x}) = 3(x')^2 + 26x'y' + 19(y')^2.$$

Напомним, что $(x; y)$ и $(x'; y')$ – координаты одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ в старом новом базисах соответственно.

7.6. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса.

Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы.

Теорема 6. *Ранг квадратичной формы не зависит от базиса.*

В самом деле, если A – матрица квадратичной формы одном базисе, а A' – матрица этой же квадратичной формы в другом базисе, то $A' = P^{\mathsf{T}} AP$, где P – (невырожденная!!) матрица перехода, то $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg}\left(P^{\mathsf{T}} AP\right) = \operatorname{rg}\left(P^{\mathsf{T}} A\right) = \operatorname{rg} A$, поскольку при умножении произвольной матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу ранг матрицы A не меняется.

Пример 7. Найти ранг квадратичной формы $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 2yz$.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы и найдем её ранг, приведя матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг квадратичной формы равен 2.

7.7. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без док-ва).

Определение. Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***положительно определённой***, если $f(\boldsymbol{x}) > 0$ для всех векторов $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, и ***отрицательно определённой***, если $f(\boldsymbol{x}) < 0$ для всех векторов $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***знакоопределенными.***

Определение. Говорят, что квадратичная форма в некотором базисе имеет ***канонический вид***, если в этом базисе её матрица A диагональная

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Сама квадратичная форма при этом содержит только квадраты координат:

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \qquad (*)$$

Ранг канонической формы, имеющей канонический вид, очевидно, равен числу её ненулевых коэффициентов

Также очевидно, что если квадратичная форма имеет канонический вид (*), то она:

положительно определена $\Leftrightarrow$ все коэффициенты $\lambda_i > 0$

положительно определена $\Leftrightarrow$ все коэффициенты $\lambda_i < 0$.

В общем случае для выявления знакоопределенности квадратичной формы, е имеющей канонический вид, имеется критерий Сильвестра.

Определение. Напомним, что ***главным минором*** квадратной матрицы называется минор, составленный з элементов, стоящих на пересечении строк и столбцов этой матрицы с **одинаковыми** номерами. ***Угловым минором*** порядка k называется её главный минор, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении её **первых** k строк и **первых** k столбцов. Квадратная матрица порядка n имеет n угловых миноров (по одному каждого порядка), и C_n^k главных миноров порядка k.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

имеет такие угловые миноры

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_4 = \det(A)$$

Теорема 7 (критерий Сильвестра). *Пусть квадратичная в некотором базисе имеет матрицу A. Тогда эта квадратичная форма:*

(а) положительно определена $\Leftrightarrow$ *все угловые миноры матрицы A строго положительны, т.е.* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots$.

(б) отрицательно определена $\Leftrightarrow$ *знаки её угловых миноров чередуются, причём, первый минор отрицательный:* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$

Полезны также следующие определения.

Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ называется ***неотрицательно определенной***, если $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ для всех векторов $\boldsymbol{x} \neq 0$, и ***неположительно определенной***, если $f(\boldsymbol{x}) \leq 0$ для всех векторов $\boldsymbol{x} \neq 0$.
[напомним, что $f(\boldsymbol{0}) = 0$ для любой квадратичной формы f].

Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ называется ***знаконеопределённой***, или знакопеременной, обозначение $f \lesseqgtr 0$, если она принимает как положительные, таки отрицательные значения. Следующее утверждение очевидно:

Предложение. Пусть квадратичная форма имеет канонический вид

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \qquad (*)$$

Тогда она

(в) неотрицательно определена $\Leftrightarrow$ все её коэффициенты неотрицательны: $\lambda_i \geq 0$;

(г) неположительно определена $\Leftrightarrow$ все её коэффициенты неположительны: $\lambda_i \geq 0$;

(д) знакопеременна $\Leftrightarrow$ среди её коэффициентов λ_i есть как положительные, так и отрицательные.

Для квадратичной формы, не имеющий канонический вид, соответствующие критерий более сложный

Теорема 8. *Пусть квадратичная в некотором базисе имеет матрицу A. Тогда эта квадратичная форма:*

(в) *неотрицательно определена* $\Leftrightarrow$ *все главные миноры матрицы A неотрицательны.*

(г) *неположительно определена* $\Leftrightarrow$ *все главные миноры матрицы A четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка – неположительны.*

(д) *знакопеременна* $\Leftrightarrow$ *матрица A содержит отрицательный главный минор четного порядка или содержит главные миноры нечетного порядка разных знаков.*

В частности, в двумерном случае, для квадратичной формы $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, получаем следующие критерии.

Квадратичная форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

(а) знакоопределена $\Leftrightarrow$ $\Delta = ac - b^2 > 0$;

(б) положительно определена $\Leftrightarrow$ $a > 0$ и $\Delta > 0$;

(в) отрицательно определена $\Leftrightarrow$ $a < 0$ и $\Delta > 0$

(г) неотрицательно определена $\Leftrightarrow$ $a \geq 0, c \geq 0$ и $\Delta \geq 0$;

(д) неположительно определена $\Leftrightarrow$ $a \leq 0, c \leq 0$ и $\Delta \geq 0$;

(е) знакопеременна $\Leftrightarrow$ $\Delta < 0$.

Пример 8. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы $f(x, y) = \lambda x^2 - 4xy + (\lambda + 3)y^2$
в зависимости от параметра λ.

Решение. Составим матрицу этой квадратичной формы. $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$

и вычислим главные миноры:

первого порядка $\Delta_1 = \lambda$, $\Delta_1' = \lambda + 3$;

второго порядка $\Delta_2 = \lambda(\lambda+3) - 4 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4)$

Составим таблицу и сделаем заключения:

λ	$\lambda < -4$	-4		-3		0		1	$\lambda > 1$
$\Delta_1 = \lambda$	–	–	–	–	–	0	+	+	+
$\Delta_1' = \lambda + 3$	–	–	–	0	+	+	+	+	+
$\Delta_2 = (\lambda-1)(\lambda+4)$	+	0	–	–	–	–	–	0	+
заключение	$f < 0$	$f \le 0$	$f \lessgtr 0$					$f \ge 0$	$f > 0$
	отрицательно определена	неположительно определена	знакопеременная					неотрицательно знакоопределена	положительно определена

7.7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа.

Теорема 9. *Для всякой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид, т.е. её матрица в этом базисе диагональная.*

Этот канонический вид не единственен, результат зависит от способа приведения к каноническому виду.

Практические способы приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1) Метод Лагранжа (выделение полных квадратов). Пусть дана квадратичная форма

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j$$

Для применения этого метола необходимо, чтобы среди коэффициентов a_{ii} хотя бы один был ненулевой. Если все коэффициенты при квадратах равны нулю: $a_{ii} = 0$, то возьмем какое-нибудь $a_{ij} \ne 0$, например, это a_{12}. сделаем вспомогательное преобразование

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_k = y_k \text{ при } k \ge 3.$$

Тогда $f(\boldsymbol{x}) = 2a_{12}x_1x_2 + \ldots = 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \ldots = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \ldots$. Получим квадратичную форму (в другом базисе), содержащую ненулевой коэффициент при y_1^2 и y_2^2.

Итак, среди коэффициентов a_{ii} хотя бы один ненулевой, пусть это a_{11}. Выпишем все слагаемые содержащие x_1, и выделим полный квадрат:

$$f(\boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + Q(x_2, x_3, \ldots, x_n) =$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 \right) -$$

$$-a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + Q(x_2, x_3, \ldots, x_n) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

где $y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n$, а $g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма от меньшего количества переменных. Эту же процедуру применим к $g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, и т.д., в результате получим $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где

$$y_k = x_k + q_{k,\,k+1} x_{k+1} + \ldots + q_{k,\,n} x_n,\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad (*)$$

Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ рассматриваем как координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в новом базисе. Соотношения (*) можно записать в матричной форме

$$Y = QX,$$

где X – столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе, Y –столбец координат этого же вектора в новом базисе, а верхнетреугольная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & q_{13} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & q_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от нового базиса к старому. Чтобы найти новый базис нужно из уравнений (*) выразить старые координаты через новые

$x_k = y_k + p_{k,\,k+1} y_{k+1} + \ldots + p_{k,\,n} y_n,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$

Которые в матричном виде записываются так: $X = PY$, где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ 0 & 1 & p_{13} & \cdots & p_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица перехода от старого базиса к новому. Её столбцы состоят из координат новых базисных векторов.

Пример 9. Привести к каноническому виду квадратичные формы и указать новый базис, в котором они имеют такой вид.

(а) $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$

(б) $g(x, y, z) = xy + 4xz - 5yz$

Решение. **Первый способ:** Сначала выделим полный квадрат для переменной x_1:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 = 5\left(x_1^2 + \tfrac{6}{5}x_1x_2\right) - 3x_2^2 = 5\left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \tfrac{3}{5}x_2 + \tfrac{9}{25}x_2^2\right) - \tfrac{9}{5}x_2^2 - 3x_2^2 =$$

$$= 5\left(x_1 + \tfrac{3}{5}x_2\right)^2 - \tfrac{24}{5}x_2^2 = 5y_1^2 - \tfrac{24}{5}y_2^2$$

– искомый канонический вид. Здесь

$$\left.\begin{matrix} y_1 = x_1 + \frac{3}{5}x_2 \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = y_1 - \frac{3}{5}y_2 \\ x_2 = \phantom{y_1 - {}} y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, новый базис $e_1 = (1; 0),\ e_2 = \left(-\tfrac{3}{5}; 1\right)$.

Второй способ: сперва выделим полный квадрат для переменной x_2:

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 = -3\left(x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2\right) + 8x_1^2 = -3\left(x_2 - x_1\right)^2 + 8x_1^2 =$$

$$= -3z_1^2 + 8z_2^2$$

– искомый канонический вид. Здесь

$$\left.\begin{matrix} z_1 = x_2 - x_1 \\ z_2 = \phantom{x_2 - {}} x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \phantom{z_1 + {}} z_2 \\ x_2 = z_1 + z_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, новый базис $f_1 = (0; 1),\ f_2 = (1; 1)$.

Отметим, что хотя эти способы дали разные канонические виды, в обоих случаях получился один положительный и один отрицательный коэффициент.

(в) Квадратичная форма не содержит квадраты переменных, поэтому сначала сделаем вспомогательное преобразование

$$x = x_1 + y_1,\ y = x_1 - y_1,\ z = z_1 .$$

Получим

$$xy + 4xz - 5yz = (x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)z_1 - 5(x_1 - y_1)z_1 = x_1^2 - y_1^2 - 4x_1 z_1 + 6y_1 z_1$$

Теперь выделяем полный квадрат при x_1, а затем при y_1

$$g = x_1^2 - 4x_1 z_1 - y_1^2 + 6y_1 z_1 = \left(x_1 - 2z_1\right)^2 - 4z_1^2 - y_1^2 + 6y_1 z_1 =$$

$$= \left(x_1 - 2z_1\right)^2 - \left(y_1 - 3z_1\right)^2 + 5z_1^2 = x_2^2 - y_2^2 + 5z_2^2$$

– искомый канонический вид, где $x_2 = x_1 - 2z_1,\ y_2 = y_1 - 3z_1,\ z_2 = z_1$.

Выразим теперь старые переменные x, y, z через новые x_2, y_2, z_2:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 2z_1 \\ y_2 &= y_1 - 3z_1 \\ z_2 &= \quad\ \ z_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 2z_2 \\ y_1 &= y_2 + 3z_2 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= x_1 + y_1 = x_2 + y_2 + 5z_2 \\ y &= x_1 - y_1 = x_2 - y_2 - z_2 \\ z &= z_1 = z_2 \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к новому базису, новый базис: $e_1 = (1; 1; 0),\ e_2 = (1; -1; 0)$, $e_3 = (5; -1; 1)$,

в котором квадратичная форма имеет канонический вид $g = x_2^2 - y_2^2 + 5z_2^2$.

7.8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Закон инерции.

Вспомним, что матрица квадратичной формы симметрична, и что для всякой симметричной матрицы A найдется ортогональная матрица Q такая, что матрица

$$A' = Q^{-1} A Q = Q^{\mathsf{T}} A Q$$

диагональная. Следовательно, верна:

Теорема 10. *Для всякой квадратичной формы найдется ортонормированный базис, в котором она будет иметь диагональный вид.*

Алгоритм (приведения квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием)

Пусть дана квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1) Выписываем её матрицу A.

2) находим собственные значения матрицы A, т.е. корни её характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3) Выписываем канонический вид этой квадратичной формы (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность):

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

4) находим ортонормированный базис из собственных векторов (как в Лекции 6)

$\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, в котором данная квадратичная форма имеет канонический вид.

7) записываем ортогональную матрицу перехода Q, её столбцами являются координаты новых базисных (собственных) векторов.

Пример 10. Привести к каноническому виду ортогональным преобразованием квадратичную форму. $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1 x_2 - 3x_2^2$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, и найдем её собственные числа.

Характеристическое уравнение

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)(-3-\lambda)-9=\lambda^2-2\lambda-24=0$$

Корни (собственные значения) $\lambda_1=6,\lambda_2=-4$.

Искомый канонический вид: $6u_1^2-5u_2^2$ (**)

Найдем собственные векторы

1) $\lambda=6$: $A-6E=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$,

решаем систему однородных уравнений

$$\begin{cases}-x_1+3x_2=0\\ 3x_1-9x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow x_1=3x_2$$

Собственный вектор $\boldsymbol{b}_1=(3;1)$

2) $\lambda=-4$: $A+4E=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$,

решаем систему однородных уравнений

$$\begin{cases}9x_1+3x_2=0\\ 3x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow x_2=-3x_1$$

Собственный вектор $\boldsymbol{b}_1=(-1;3)$.

Нормируем собственные векторы: $\boldsymbol{f}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(3;1)$, $\boldsymbol{f}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1;3)$.

В этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид (**). Матрица перехода: (ортогональная!):

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

Замечание. Одну и ту же квадратичную форму $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=5x_1^2+6x_1x_2-3x_2^2$ мы привели к каноническими виду тремя способами (дважды методом Лагранжа и ортогональным преобразованием), и получили разные ответы

$$f=5y_1^2-\tfrac{24}{5}y_2^2=-3z_1^2+8z_2^2=6u_1^2-4u_2^2.$$

Однако во всех трех случаях у нас получился один положительный и один отрицательный коэффициент. Справедлива общая теорема.

Теорема 11 (закон инерции квадратичных форм). *При любом способе приведения квадратичной формы к каноническому виду всегда будет одно и то же как количество положительных коэффициентов, так и количество отрицательных коэффициентов.*

Пример 11. Преподаватель задал трем студенткам: Маше, Даше и Глаше привести одну и ту же квадратичную форму к каноническому виду. Они получили такие ответы.

Маша: $3y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$; **Даша:** $3y_1^2-2y_2^2-5y_3^2$; **Глаша:** $-7y_1^2+11y_2^2+4y_3^2$

Преподаватель посмотрел она ответы и сказал, что **одна** студентка ошиблась. Кто из них ошибся?

Ответ **ашаД ьсалбишО**